Devoir Maison

Pour le 6 janvier 2025

Problème

(adapté de Ecricome ECS 2018)

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie I — Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathbb{P}(N=0) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N=k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(N=k-1).$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.
   a) Montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N=k) = \frac{b^k}{k!}\mathbb{P}(N=0).$$
   b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k)$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
   Préciser son espérance et sa variance.
2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.
   a) Montrer que :
   $$\forall k \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(N=k) = 0.$$
   b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.
3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.
   a) Montrer que :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(Z=k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(Z=k-1).$$
   b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p.
4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.
   a) Calculer $\mathbb{P}(N=1)$. En déduire que $a + b \geqslant 0$.
   b) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$:
   $$\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\mathbb{P}(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}(N=k).$$
   c) En déduire que $\left((1-a)\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N=k)\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.
   Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de a et b.
   d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et que :
   $$\mathbb{E}\left(N^2\right) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.$$
   e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathbb{V}(N)$ en fonction de a et b.
   f) Montrer que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Partie II — Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}(N = k),$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\dfrac{b}{a} > 0$. On note $\alpha = \dfrac{-(a+b)}{a}$ et G la série génératrice de N

5. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière G
6. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k} p_{k-1} x^k$ et H sa fonction somme.
   (a) Justifier que G et H ont même rayon
   (b) Pour $x \in]-R, R[$ déterminer $H'(x)$
7. (a) Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$
   $$G(x) = p_0 + axG(x) + bH(x)$$
   (b) En déduire une équation différentielle linéaire vérifiée par G.
   (c) Déterminer un expression explicite de G sur $]-R, R[$.
8. En utilisant G et ses dérivées, retrouver les expressions de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{V}(N)$ obtenues dans la partie I.